ICPC World Finals 2021 풀이

11월에 ICPC World Finals 2021에 참가했습니다. 이후 11월 말까지 한 문제를 제외한 나머지를 모두 풀었고, 이 글에서 모든 문제의 풀이를 정리합니다.

최근 3년과 달리 상대적으로 쉬운 (플래 하급 이하) 문제가 좀 더 많이 나왔는데, 그것들을 푸느라 더 어려운 문제에 쓸 시간이 부족했습니다.

A: Crystal Crosswind

바람의 방향이 (w_x, w_y), 가장자리의 집합이 S라고 하면 다음과 같은 정보를 얻습니다.

- (1) $(x, y) \in S$일 경우, (x, y)은 분자고, $(x - w_x, y - w_y)$는 빈칸입니다.
- (2) $(x, y) \notin S$일 경우, (x, y)가 빈칸이거나 $(x - w_x, y - w_y)$가 분자입니다.

두 번째 조건은 "(2A) (x, y)가 분자면 $(x - w_x, y - w_y)$도 분자", 혹은 "(2B) $(x - w_x, y - w_y)$가 빈칸이면 (x, y)도 빈칸"과 동치입니다.

먼저 분자가 가장 적은 경우부터 구해봅시다. 우선 (1)로부터 무조건 분자여야 하는 칸이 정해집니다. 그리고 (2A)로부터 추가로 무조건 분자여야 하는 칸이 어디인지 알 수 있습니다. (2A)를 반복적으로 적용시키다가 더 이상 무조건 분자여야 하는 칸이 안 생길 때가 바로 답입니다. 나머지 모든 칸을 빈칸으로 둬도 모든 규칙이 만족되기 때문입니다. 따라서 (2A)에 해당하는 각 칸 (x, y)에서 $(x - w_x, y - w_y)$로 간선을 긋고, (1)에 해당하는 칸들을 시작점으로 하여 그래프 순회를 해주면 됩니다. 이때 각 칸이 적어도 한 번 방문되었을 경우 그 칸에는 분자가 있고, 아니면 빈칸입니다.

분자가 가장 많은 경우도 비슷합니다. (1)로부터 무조건 빈칸이어야 하는 칸이 정해지고, 여기에 (2B)를 반복적으로 적용시켜야 합니다. 하지만 여기서 끝나는 게 아니라, (3) 격자의 바깥은 전부 빈칸입니다. 격자의 바깥에는 칸이 너무 많으니까 이걸 일일이 다 체크하지 말고, 여기다가 (2B)를 한 번 적용시켜서, 각 칸 (x, y)에 대해 $(x - w_x, y - w_y)$가 격자 바깥이면 (x, y)를 빈칸으로 두면 됩니다. 이제 (2B)에 해당하는 간선들을 긋고, (1)과 (3 + 2B)에 해당하는 칸들을 시작점으로 하여 그래프 순회를 해주면 됩니다.

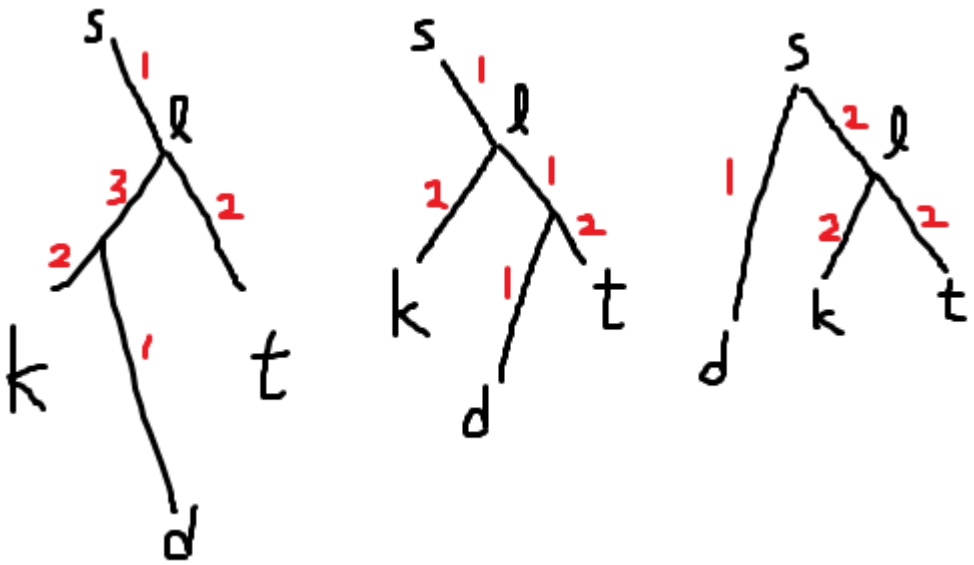
시간 복잡도는 $O(d_x d_y k)$입니다.

B: Dungeon Crawler

시작점을 루트로 잡읍시다.

열쇠와 함정을 무시할 경우, 트리 순회를 하는데 가장 깊은 (루트에서 가장 먼) 점에서 멈추는 것이 최적입니다. 따라서 답은 `2*(간선 길이의 합) - (가장 깊은 점의 깊이)`입니다.

이제 함정과 열쇠가 있다고 합시다. 우선 함정이 열쇠의 조상이면 `impossible`입니다. 아닐 경우, 가장 마지막으로 방문하는 정점이 d라고 합시다. 가장 깊은 점이 아닐 수도 있습니다. 열심히 케이스 분석을 해보면서, 각 경로를 지나는 횟수를 아래 그림에서 빨간 글씨로 표시해보면 다음과 같습니다.



함정과 열쇠의 LCA를 l, 열쇠와 d의 LCA를 z라고 하면 답은 `2*(간선 길이의 합) - (d의 깊이) + 2*(z에서 1까지 거리)`입니다. 모든 d에 대해 이걸 계산하고 최솟값을 찾으면 됩니다.

쿼리를 같은 시작점들끼리 묶어, 각 시작점마다 $O(n)$ 시간 전처리를 한 번씩 해줄 수 있다고 합시다. 그 후 각 쿼리를 어떻게든 $O(n)$에 수행하면 $O(n^2+qn)$이고, 이는 약 4억이므로 시간 내에 돌아갑니다.

저기서 시간이 걸리는 요인은 (1) LCA 계산, (2) 거리 계산입니다.

(1) LCA의 경우, 모든 정점과 열쇠의 LCA를 구하는 것이 문제입니다. LCA는 희소 배열 외에도 오일러 투어 + 구간 최솟값 쿼리로 풀 수 있음이 알려져 있습니다. 이 구간 최솟값도 범위의 한쪽 끝이 정해져 있기 때문에, 세그먼트 트리 같은 걸 쓸 필요 없이 그냥 범위를 하나씩 늘려 주면서 최솟값을 갱신하면 전체 $O(n)$에 모든 LCA를 구할 수 있습니다.

(2) 거리 계산의 경우, z와 l은 조상 관계이기 때문에 두 정점의 깊이의 차를 구하면 됩니다.

C: Fair Division

첫 번째 해적이 받는 금화의 비율은 $\sum_{i=0}^{\infty}(1-f)^{ni}=\frac{1}{1-(1-f)^n}$입니다. $(j+1)$번째 해적이 받는 금화의 비율은 $\frac{(1-f)^j}{1-(1-f)^n}$입니다. 따라서 금화의 비는 $1:(1-f):\cdots:(1-f)^{n-1}$입니다. $f=\frac{p}{q}$이고 p

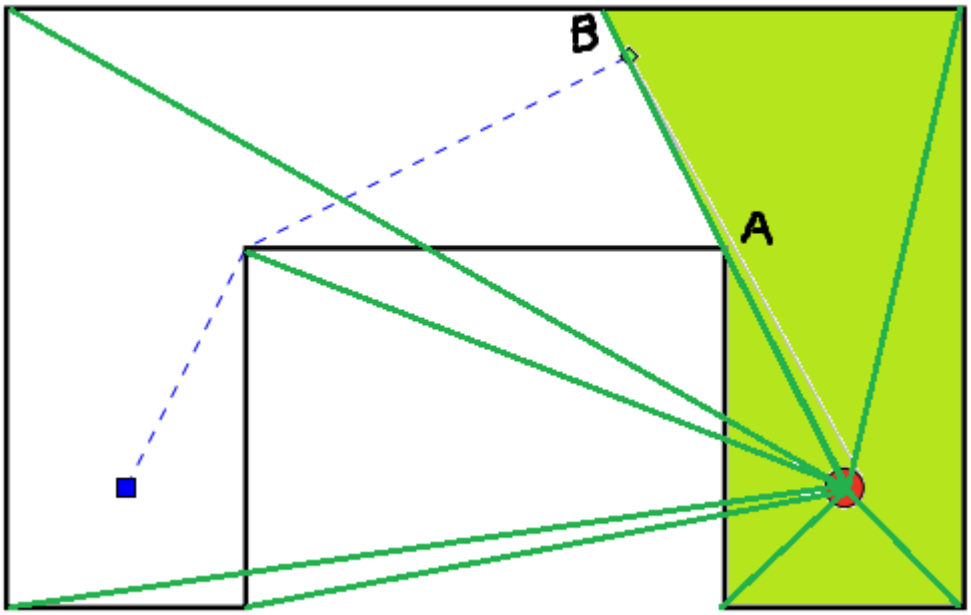
와 q가 서로소라고 하면, 금화의 비는 $q^{n-1} : q^{n-2}(q-p) : \cdots : (q-p)^{n-1}$입니다. 이 수들은 서로소이므로 $q^{n-1} + \cdots + (q-p)^{n-1}$의 합이 m의 약수여야 합니다.

그러려면 일단 $q^{n-1} \le m$이어야 되는데, $n-1 \ge 5$이고 $m \le 10^{18}$이기 때문에 $q \le 3981$까지만 보면 됩니다. (1000이 아닙니다!) 오버플로우를 막으려면 저 n개 항을 통째로 합하는 게 아니라, 하나하나 더하면서 m을 넘을 때 바로 끊어줘야 합니다. 시간 복잡도는 $O(m^{2/(n-1)})$입니다.

D: Guardians of the Gallery

대회 당시 유일하게 아무도 못 푼 문제였고, 이 글을 쓰는 현재 백준 온라인 저지에 제출된 정답 코드가 없습니다. 아쉽게도 딱 한 테스트케이스에서 틀린 팀이 있었다고 합니다.

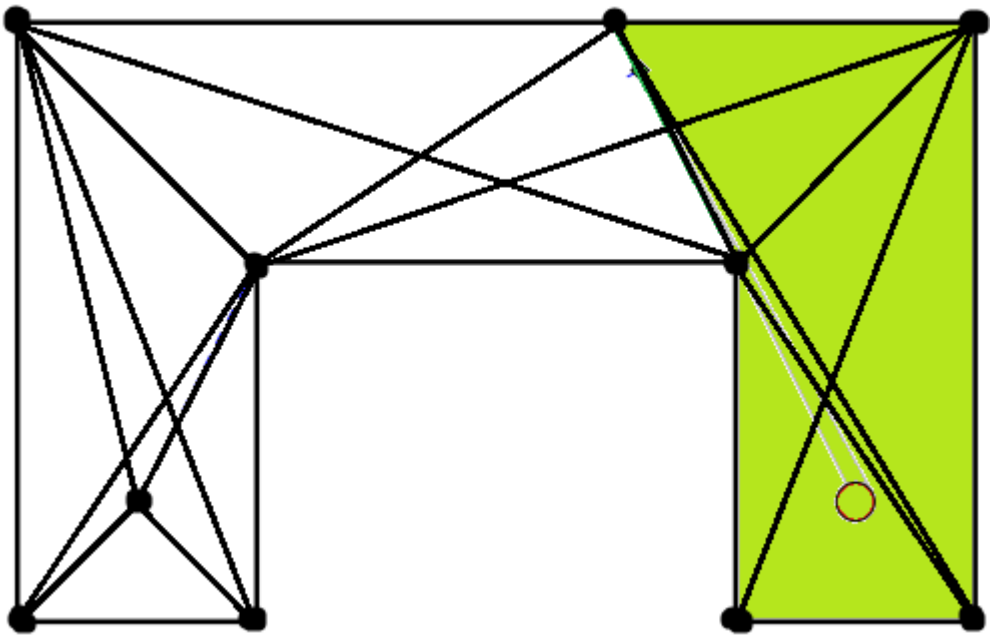
우선 조각상이 보이는 영역을 구해야 합니다. 조각상에서 각 꼭짓점으로 반직선을 긋습니다. 각 반직선에 대해, 그 반직선이 미술관의 어디까지 닿는지를 계산합니다. 간단하게 생각하면 반직선과 각 선분의 교점을 구하고 가장 가까운 교점을 구하면 되는데, 실제로는 반직선의 왼쪽과 오른쪽 영역이 모두 막히는 교점까지 가야 합니다. 예를 들어 아래 그림에서 A 방향으로 그은 반직선은 A에서 끝나는 게 아니라 오른쪽 영역까지 막히는 B까지 가야 합니다. 각 선분이 어느 방향에서 교차하는지를 구하고, 교점을 가까운 순으로 정렬한 다음 하나씩 확인하면 됩니다. 시간 복잡도는 $O(n^2)$이고, 이 다각형에는 변이 $O(n)$개 있습니다.



이제 출발점에서 목표 영역까지 가는 최단거리를 구해야 합니다. 최단경로는 다음과 같은 형태입니다. (1) 우선 미술관의 꼭짓점 몇 개를 거치고, (2) 마지막에 목표 영역의 한 변에 수직인 방향으로 직진합니다.

(1)은 출발점, 목표 영역의 꼭짓점 및 미술관의 꼭짓점들을 정점으로 잡고, 서로 이동 가능한 정점 쌍을 이어 그래프를 만든 뒤 데이크스트라 알고리즘을 돌려서 구할 수 있습니다. 정점 쌍이 서로

이동 가능한지 판별하려면 둘을 잇는 선분이 미술관의 각 변과 (끝점 제외하고) 안 겹치는지 판별하면 됩니다. 시간 복잡도는 $O(n^3)$입니다.



마지막으로, (2)는 각 정점에서 목표 영역의 각 변으로 수선을 긋고, 마찬가지로 미술관의 각 변과 안 겹치는지 + 수선이 실제로 그 변과 만나는지 판별하면 됩니다. 시간 복잡도는 $O(n^3)$입니다.

E: Hand of the Free Marked

우선 Fitch Cheney trick의 원본부터 분석해 봅시다. 이 마술은 본질적으로 **52개 카드 집합에서의 크기 5의 조합**에서 **52개 카드 집합에서의 크기 4의 순열**로 가는 일대일함수를 만드는 문제입니다. 조교는 조합에서 순열로 함수를 적용하고, 마술사는 그 순열에서 다시 조합으로 역함수를 적용하는 것이죠.

카드가 전체 n개이고 그중에서 k개를 뽑는다면, 전자는 $A := \frac{n!}{k!(n-k)!}$개이고, 후자는 $B := \frac{n!}{(n-k+1)!}$인데, $A \leq B$이면 일대일함수가 존재할 것 같이 생겼습니다. 계산해보면 $n = k! + k - 1$일 때 정확히 $A = B$이고, n이 그보다 커지면 $A > B$라서 일대일함수가 존재할 수 없습니다. 물론 순열을 이루는 카드 4개가 모두 조합에 속해야 하기 때문에, $A \leq B$라고 해서 아무렇게나 일대일함수를 만들면 안 됩니다. 다행히도 조건을 만족하는 일대일함수가 항상 존재합니다. 왜냐?

전자와 후자를 잇는 이분그래프를 생각합시다. 카드가 많을 때 가능하다면 적을 때도 가능하니까, $n = k! + k - 1$, $A = B$라고 합시다. 이제 이 그래프에 완전 매칭이 존재함을 홀의 정리로 증명합니다. 각 전자 조합은 정확히 $k!$개의 후자 순열과 인접하고, $A = B$니까 각 후자 순열도 정확히 $k!$개의 전자 조합과 인접합니다. 즉 이 그래프는 $k!$-regular graph입니다. 이제 전자 조합을 s개 골랐다고 하면, 이 조합들은 $k!s$개의 간선과 연결되어 있기 때문에, 적어도 s개의 후자 순열이 이 조합들과 인접해야 합니다. 따라서 홀의 정리에 의해 완전 매칭이 존재합니다.

$A > B$일 경우, 마술이 성공할 확률은 $\frac{B}{A}$입니다. 함숫값이 가능한 한 안 겹치도록 함수를 만들었으면, 전자의 원소 중에서 함수를 취하고 "역함수"를 취했을 때 자기 자신으로 돌아올 수 있는 원소가 B개이기 때문입니다.

이제 이 문제에서는 카드가 너무 많아서, ~~덱에서 카드를 몇 개 뺄 생각은 안 하고~~ 카드에 마킹을 해놓아서 마술사가 마지막 카드의 마킹을 알 수 있습니다. 얼핏 생각해보면 전자는 그대로 조합이고, 후자는 순열에다가 마킹 하나가 추가로 주어진 거니까 그대로 A와 B를 구하면 될 것처럼 생겼지만, 이러면 regular graph가 아니라서 위의 증명이 통하지 않습니다.

그 대신, 마술사가 마지막만이 아니라 **모든 카드의 마킹**을 알 수 있다는 사실에 주목합시다. 무슨 카드에 무슨 마킹이 있는지 외우면 그만이니까요. 따라서 마킹의 조합은 마술사와 조교가 공유하는 정보입니다. 그뿐만 아니라, 마킹의 조합을 고정하고 나면 **원본 Fitch Cheney trick과 동일한 문제**가 됩니다. 마킹의 조합을 백트래킹으로 뽑아내고, 각 조합에 대해 그 조합이 실제로 뽑힐 확률과 그 조합에서 마술이 성공할 확률을 곱하여 모두 더하면 답을 얻습니다.

마킹의 조합의 개수는 m과 k의 중복조합인데, $m = k = 10$일 때 이는 $\binom{19}{10} = 92378$이므로 충분히 모두 뽑아낼 수 있습니다. 이제 각 마킹 i에 대해, 그 마킹이 된 카드가 전체 A_i개이고 그중에서 C_i개를 뽑았다고 하면, 그 조합이 뽑힐 확률은 $\frac{1}{\binom{n}{k}} \prod \binom{A_i}{C_i}$이고, 그 조합에서 마술이 성공할 확률은 $\min(1, \frac{1}{\prod \binom{A_i}{C_i}} (k-1)! \prod \binom{A_i}{C_i} \sum_{C_i>0} \frac{\binom{A_i}{C_i-1}}{\binom{A_i}{C_i}}) = \min(1, (k-1)! \sum_{C_i>0} \frac{C_i}{A_i - C_i + 1})$입니다.

저는 여기에 log를 씌워서 계산한 다음 exp로 되돌리는 식으로 구현했는데, `long double`도 안 되고 `__float128`까지 써야 10^{-10} 정도의 절대오차로 통과했습니다. 모범 코드는 `double`만 쓴 걸로 봐서 식을 어떻게 정리했느냐에 따라 `double`로도 충분히 통과되는 것으로 보입니다.

시간 복잡도는 $O(\binom{m+k-1}{k} m)$입니다.

Fitch Cheney trick을 직접 선보이고 싶다면 이 문제와 이 문제를 풀어보시면 되겠습니다. 참고로 간선이 너무 많아서 이분 매칭 알고리즘을 직접 돌리는 식으로는 풀 수 없고, 매칭을 머리로 찾아내야 합니다.

F: Islands from the Sky

지문이 무서워 보이지만 (3차원 기하???), 정작 읽어보면 대부분이 지문을 무서워 *보이게* 만드는 장치라고 느껴집니다.

θ에 대해 이분탐색을 합니다. θ를 정하면 각 사다리꼴 영역이 정해집니다. 비행기의 높이가 h이면 밑변의 길이는 $2h \tan\theta$이고, 방향은 비행 경로를 90도씩 회전시켜서 구할 수 있습니다. 이제 각 섬이 적어도 한 사다리꼴의 내부에 속하는지 판별합니다. 사다리꼴은 볼록다각형이므로 섬의 모든 꼭짓점만 확인하면 됩니다.

시간 복잡도는 $O((\sum_{i=1}^{n} n_i) m \log X)$입니다.

저희 팀의 다른 팀원 분은 이분탐색 없이 풀었는데, 손 계산이 좀 들어갈 것 같습니다.

G: Mosaic Browsing

패턴과 격자의 높이가 1일 경우 와일드카드 문자열 매칭 문제와 동일하고, FFT로 풀 수 있습니다. 이 문제에서는 격자에 와일드카드가 없으므로 T_j는 안 곱해도 됩니다. 계수가 꽤 큰 편이므로 주의하세요.

높이가 2 이상일 경우, 그냥 격자를 일렬로 펴고 패턴에 와일드카드 패딩을 붙이면 높이 1 문제로 환원됩니다. 예를 들어 예제는 이렇게 될 겁니다. 물론 몇몇 인덱스는 격자에 안 맞기 때문에 매칭이 되어도 출력하지 말아야 합니다.

```
패턴: 1 0 0 0 0 1
격자: 1 2 1 2 2 1 1 1 2 2 1 3
```

bitset으로 푸는 방법도 있다고 합니다. (...)

H: Prehistoric Programs

AtCoder Beginner Contest 167F와 같은 문제이고, 다른 대회에서도 몇 번 나왔다고 합니다. 심지어 2016년 월드 파이널 Swap Space와도 거의 같은 문제입니다!

우선 주어진 문자열이 올바른 괄호 문자열인지 판별하는 문제를 생각해봅시다. PS를 입문할 때 접해보셨을 유명한 문제입니다. 문자를 차례대로 보면서 `(`이면 카운터를 1 증가시키고 `)`이면 1 감소시킬 때, 카운터가 단 한 번도 음수가 되지 않으면서 마지막에는 0이 되어야 합니다.

이제 이 문제로 돌아와보면, 각 조각은 다음과 같은 정보로 표현할 수 있습니다. "이 조각을 사용하려면 카운터가 x 이상이어야 하고, 사용하면 카운터가 d만큼 변한다."

모든 d의 합이 0이 아니면 당연히 `impossible`입니다. 이제 합이 0이라고 가정합시다. $d \geq 0$인 조각들을 **올라가는 조각**, $d < 0$인 조각들을 **내려가는 조각**이라고 합시다. 그러면 먼저 올라가는 조각이 다 나오고, 그 다음에 내려가는 조각이 다 나와야 합니다. 어떤 올바른 해에서 내려가는 조각 바로 다음에 올라가는 조각이 나왔다면 그 둘을 교환해도 여전히 올바른 해가 되기 때문입니다.

이 조건대로 나열하면 카운터는 올라가는 조각을 다 쓰면서 정점을 찍고 다시 내려가는 조각을 다 써서 0으로 돌아오게 됩니다. 그 정점을 기준으로 둘로 나누고, 내려가는 조각을 쓰는 과정을 뒤집으면, 올라가는 조각을 쓰는 과정만 두 번 있는 형태가 됩니다. 따라서 올라가는 조각만 쓰는 문제를 두 번 풀면 됩니다.

이제 올라가는 조각들을 잘 정렬해야 되는데, 그 순서는 바로 x에 대한 오름차순입니다. 어떤 올바른 해에서 (x_1, d_1) 바로 다음에 (x_2, d_2)이 나오고 $x_1 > x_2$라면, (x_1, d_1)을 쓰는 순간에 카운터는

$c \geq x_1$인데, 둘을 교환하면 $c \geq x_1 > x_2$, $c + d_2 \geq c \geq x_1$이라서 여전히 올바른 해가 되기 때문입니다.

이렇게 정렬했는데도 올바른 괄호 문자열이 안 되면 `impossible`이고, 되면 그 순서를 그대로 출력해주면 됩니다.

I: Spider Walk

편의를 위해, 거미줄이 원형이 아니라 1번과 N번 가닥이 안 이어진 선형이라고 합시다. 풀이는 거의 달라지지 않습니다. 이제 우리가 풀어야 하는 문제는 다음과 같습니다.

> 사다리타기를 하는데, i번째 가닥에서 시작해서 s번째 가닥의 맨 밑에 도착하려고 합니다. 그어야 하는 다리의 최소 개수를 각각의 i에 대해 구하세요.

위에서 아래로 움직이면서 각 가닥으로부터 s번째 가닥까지 가는 게 아니라, 거꾸로 아래에서 위로 움직이면서 s번째 가닥으로부터 각 가닥까지 간다고 생각합시다.

`DP[i][j]`를, 첫 i개의 다리만 고려하고 나머지 다리를 자유롭게 그을 수 있을 때 j번째 가닥에 오는 최소 비용이라고 합시다. `DP[0][..]`은 s를 시작으로 양옆으로 하나씩 늘어나는 형태일 것입니다.

우선 `DP[i][..]`은 이웃한 DP 값들의 차이가 1 이하임을 염두에 둡시다. 이웃한 DP 값이 2 이상 차이가 날 경우, 낮은 쪽에서 높은 쪽으로 다리를 이어주면 더 좋은 해가 나오기 때문입니다.

`DP[i][..]`가 계산되었을 때 `DP[i+1][..]`을 계산하려면,

- `i`번째 다리가 a와 $a+1$을 잇는다고 합시다.
- `DP[i+1][a+1]`과 `DP[i+1][a]`에 각각 `DP[i][a]`와 `DP[i][a+1]`을 넣고, 나머지 `DP[i+1][..]` 값들은 `DP[i][..]`를 그대로 따라갑니다.
- 두 DP 값이 교환되면서 이웃한 DP 값의 차이가 2가 될 수 있습니다. 이 경우 높은 쪽을 하나 낮춰줍니다. 일단 `DP[i+1][a]`와 `DP[i+1][a+1]`만 낮춰줍시다.
- 그런데 저 값들을 낮추면서 또 다른 이웃한 DP 값의 차이가 2가 될 수 있습니다. 얘네들은 한꺼번에 낮춰줍시다. `DP[i+1][a] = v`라고 할 때, 각 `DP[i+1][..]`를 다시 계산합니다. `DP[i+1][b]`에는 현재 값과 `v + (a에서 b까지의 거리)` 중 최솟값을 넣으면 됩니다.
- `DP[i+1][a+1] = v'`도 마찬가지로 써서 각 `DP[i+1][..]`를 다시 계산합니다.

여기까지 하면 $O(nm)$입니다.

네 번째, 다섯 번째 과정에서 `DP[i+1][b]`들을 효율적으로 계산해야 합니다. `v + (a에서 b까지의 거리)`는 절댓값 함수이기 때문에, 기울기가 1 또는 -1인 일차함수 여러 개로 표현할 수 있습니다. 따라서 이는 세그먼트 트리 lazy propagation으로 최적화할 수 있습니다. Lazy 값을 `(p, q)`로 둬서 `min(현재 값, x+p, -x+q)`을 표현하면 됩니다. 시간 복잡도는 $O(n + m \log n)$입니다.

이외에도 DP 값의 차이가 1인 이웃한 인덱스들을 그룹으로 묶어서 `std::set`으로 관리하는 풀이가 있습니다. 네 번째 과정에서 최대 하나의 그룹이 통째로 내려갈 것입니다. 따라서 내려갈 때 양옆의 그룹과 합쳐야 되면 합치고, DP 값을 교환할 때 그룹을 분리하는 식으로 구현할 수 있습니다.

J: Splitstream

우선 각 노드에 들어가는 수의 개수를 계산합니다. 1번을 입력으로 받는 노드는 정확히 m개의 수를 받습니다. Split 노드는 자신이 입력으로부터 받은 양을 두 출력 노드에 대강 반씩 나눠줍니다. 정확한 양은 자신에 들어가는 수의 개수의 홀짝성에 따라 다릅니다. Merge 노드는 출력 노드에 자신이 두 입력으로부터 받은 양 만큼 넘겨줍니다. 이 모든 것은 재귀 DP를 돌리거나, 위상 정렬하고 그 순서대로 DP를 돌려서 구할 수 있습니다.

쿼리를 처리하려면, x에서부터 입력 노드를 타고 거꾸로 거슬러 올라가면서 k를 관리하면 됩니다. 현재 보고 있는 입력이 split 노드의 출력일 경우 그 노드의 입력으로 올라가고, k는 대강 두 배가 됩니다. 정확한 양은 그 입력이 split 노드의 어느 방향 출력인지에 따라 다릅니다. Merge 노드일 때는 조금 복잡합니다. Merge 노드의 두 입력에 들어가는 수가 각각 a, b개라고 합시다. $k \le 2 \times \min(a, b)$라면, k의 홀짝성에 따라 어느 입력으로 올라가는지가 다르고 k는 대강 절반이 됩니다. 아니라면, 둘 중 개수가 큰 입력으로 올라가고 k는 $\min(a, b)$만큼 감소합니다.

거슬러 올라가다가 한 번이라도 k가 현재 입력에 있는 수의 개수를 넘어가면 `none`이고, 넘어가는 일 없이 1번 입력까지 올라갔으면 그 k를 그대로 출력하면 됩니다. $O(qn)$인데 q와 n이 모두 작기 때문에 시간 내에 잘 돌아갑니다.

K: Take On Meme

각각의 밈은 벡터로 볼 수 있습니다. 노드 v의 최종 밈으로 가능한 모든 벡터의 집합을 S_v라고 합시다.

우선 벡터의 집합 S와 T에 대해,

- $-S = \{-p : p \in S\}$, 즉 모든 벡터를 180도 뒤집은 집합,
- $S + T = \{p + q : p \in S, q \in T\}$, 즉 두 집합에서 하나씩 뽑아 합치는 모든 경우를 담은 집합이라고 합시다. 이를 "집합의 덧셈"이라고 합시다. 마찬가지로 3개, $\cdots$, k개의 집합에 대해서도 덧셈을 정의할 수 있습니다.

이제 S_v를 다음과 같이 계산합니다.

- 리프 노드이고 해당하는 밈이 p일 경우, $S_v = \{p\}$입니다.
- 자식 노드가 $1, \cdots, k$라고 합시다. 어떤 i에 대해, $S_1, \cdots, S_k$ 중 S_i만 그대로 두고 나머지를 $-S$로 뒤집은 다음, 그 집합들을 전부 더한 것을 T_i로 정의합니다. 이제 $S_v = \bigcup_i T_i$입니다.

참 쉽죠? 아쉽게도 밈이 9,000개를 넘는데, 이러면 절대로 문제를 풀 수 가없으니 출제자가 치명적인 약점을 남겨 놨죠. 이 문제의 치명적인 약점은 바로 좌표 범위와 차수가 작다는 것입니다. 우리는 결코 이 문제를 포기하지도, 실망시키지도, 마음 바꿔 버리고 떠나지도 않을 겁니다.

사실 우리가 구해야 되는 건 S_1의 원소 중 원점에서 가장 먼 것입니다. 그러면 S_v의 원소를 다 들고 있지 말고, "원점에서 먼" 것들만 적당히 들고 있으면 되지 않을까요? 맞습니다. 각 벡터를 점으로 생각했을 때 볼록 껍질을 이루는 것들만 들고 있으면 됩니다. 그러니까 S_v는 그냥 벡터의 집합이 아니라 볼록다각형이라고 생각해도 충분합니다.

볼록다각형으로 생각하면 둘을 더하는 것도 간편합니다. 이를 민코프스키 합이라고 하고, 선형 시간에 구할 수 있습니다. 합집합은 그냥 볼록 껍질 알고리즘을 아무거나 쓰면 됩니다.

이렇게 하면 최적화가 매우 많이 된다는 건 짐작 가능하지만, 정확한 시간 복잡도를 구하기는 어렵습니다. 대충 어림잡아 봅시다.

- 좌표 범위가 X일 때 볼록 다각형의 점의 개수는 $O(X^{2/3})$임이 알려져 있습니다.
- 어떤 노드 v의 자식 노드가 k개이고, v 서브트리 안에 리프 노드가 f개라고 하면, 좌표 범위는 Xf이므로 최종적으로 $O((Xf)^{2/3})$개의 점이 남고, 이는 $O(k \log k (Xf)^{2/3})$ 정도에 계산할 수 있습니다.
- 따라서 S_1은 $O(n \log k (Xn)^{2/3})$ 정도에 계산할 수 있습니다.
- $n = 10^4, k = 100, X = 10^3$을 넣으면 약 32억이 나옵니다.
- 서브트리가 작을 때는 $O((Xn)^{2/3})$개보다 훨씬 적은 점이 쓰이고, 서브트리가 클 때도 매번 최악의 케이스가 나오는 건 불가능에 가깝기 때문에, 실제로는 32억보다 훨씬 적은 연산이 들 것임을 짐작할 수 있습니다. 이론적으로도 더 작은 상한을 얻는 게 가능할 것 같습니다.

실제로 돌려 보면 별다른 최적화를 하지 않아도 여유롭게 통과합니다. 제 구현은 약 200 ms가 걸립니다.

L: Where Am I?

각 시작점에서 출발했을 때 각 마커를 언제 방문하는지 계산합니다. 이 문제를 풀어보시면 좋습니다. $O(N^2M)$에 구할 수 있고, 사실 $O((NM)^2)$에 시뮬레이션 돌려서 계산해도 잘 짜면 시간 내에 돈다고 합니다. (N은 격자의 크기, M은 마커의 개수)

각 시작점마다 그 방문 시각들을 정렬합니다. 그 후 그 목록들을 다시 한 번 사전순으로 정렬합니다. 예를 들면 이런 식으로 나올 겁니다. (정확한 수는 아니고 그냥 아무거나 쓴 겁니다.)

```
[0, 1, 5, 10]: (1, 3)
[0, 1, 6, 7]: (2, 4)
[1, 5, 7, 12]: (3, 3)
[1, 5, 9, 13]: (4, 1)
[1, 7, 10, 12]: (2, 1)
```

```
[1, 9, 12, 15]: (4, 4)
...
```

`(3, 3)`과 `(4, 1)`을 처음으로 구별 가능한 시점은 7입니다. 6까지는 둘 다 마커를 1, 5에서 방문해서 서로 구별할 수 없지만, 7이 되면서 `(3, 3)` 쪽만 마커를 방문하기 때문입니다. 이를 일반화해보면, 목록이 A와 B인 두 지점을 구별 가능한 최초의 시점은 $A[i] \neq B[i]$인 가장 작은 i에 대해 $\min(A[i], B[i])$입니다.

이 비교 과정을 모든 목록으로 확장해봅시다. 시점 0이 되면 `(1, 3)`과 `(2, 4)`가 나머지 전부와 구별이 됩니다. 이제 재귀적으로 `(1, 3)`과 `(2, 4)`를 구별하고, 나머지 전부를 서로 구별하면 됩니다.

$solve(t, l, r)$을 현재 시각이 t일 때 l번째부터 r번째 목록까지 구별하는 함수라고 합시다. $l > r$일 경우 할 게 없습니다. $l = r$일 경우 l번째 목록이 시각 t에서 유일하게 결정됩니다. $l < r$일 경우, l번째 목록이 마커를 다시 방문하는 순간까지 시각을 올렸다가, 그 시각 t'에 마커를 방문하는 목록이 l부터 k번째라면, $solve(t', l, k)$와 $solve(t', k+1, r)$을 재귀적으로 호출해주면 됩니다.

출력할 때 y 순으로 먼저 비교해서 정렬해야 한다는 점을 주의하세요.