

삼각형 찾기

[pdf로 보기](#)

단순 그래프의 정점의 개수를 n , 간선의 개수를 m 이라고 합시다. 이 그래프에 있는 삼각형, 즉 길이가 3의 사이클을 모두 찾을 수 있을까요?

$$O\left(\frac{nm}{w}\right)$$

간선 하나 uv 를 고정하고, 그 간선을 포함하는 삼각형을 찾아봅시다.

인접 행렬을 만듭니다. 그러면 u 와 v 에 인접한 모든 정점 a 에 대해 삼각형 uva 를 찾을 수 있습니다. 인접 행렬의 u 행과 v 행에서 둘 다 인접 표시가 된 열을 찾으면 됩니다. 시간 복잡도는 $O(nm)$ 입니다.

이 과정을 비트셋의 교집합 연산으로 최적화하면 시간 복잡도 $O\left(\frac{nm}{w}\right)$ 에 모든 삼각형을 찾을 수 있습니다. 64비트 컴퓨터에서 $w = 64$ 입니다.

구현

TODO

연습문제

- [BOJ 20501 Facebook](#)
- [ABC258 Triangle](#)
- [BOJ 8907 네온 사인](#) / [BOJ 8096 Monochromatic Triangles](#)를 말그대로 붉은색, 파란색 삼각형을 직접 세서 풀 수 있습니다.

$$O(m\sqrt{m})$$

정점 v 의 차수를 $\deg(v)$ 라고 할 때, 다음 식을 생각해 봅시다.

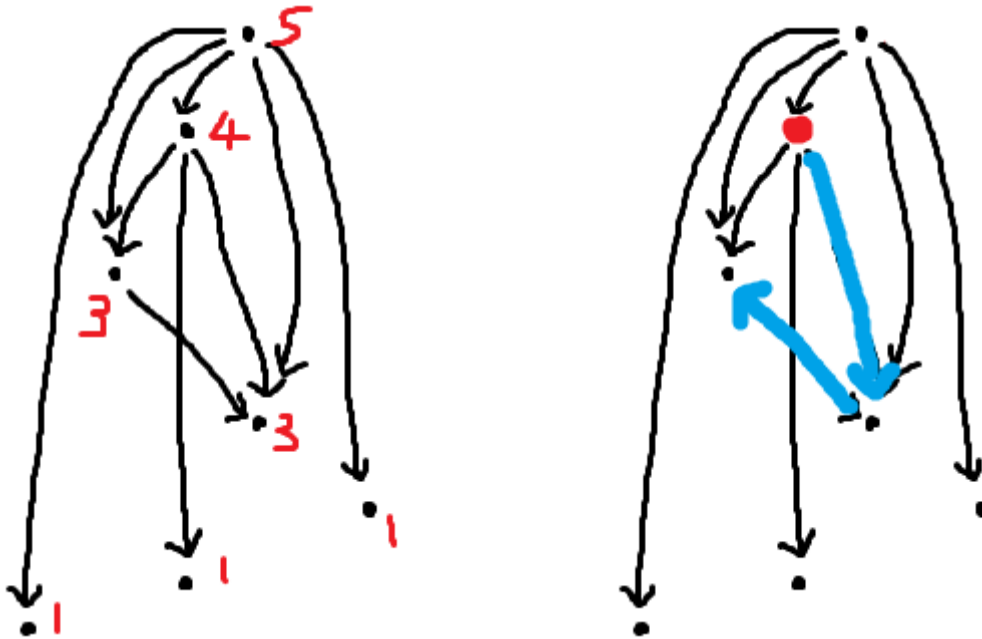
$$\sum_{uv \in E} \min(\deg(u), \deg(v))$$

이 값은 $O(m\sqrt{m})$ 입니다.

증명. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$ 이므로, $\deg(v) \geq \sqrt{m}$ 인 정점은 많아야 $O(\sqrt{m})$ 개입니다. 그래프가 단순하므로, $\min(\deg(u), \deg(v)) \geq \sqrt{m}$ 인 간선은 많아야 $O(m)$ 개입니다. 나머지 간선은 $\min(\deg(u), \deg(v)) \leq \sqrt{m}$ 입니다. ■

이제 정점을 차수 순으로, 동점일 경우 번호 순으로 정렬해서 위에서 아래로 늘어놓읍시다. 위 v 에서 아래 p 로 가는 간선을 $v \downarrow p$ 라고 합시다.

모든 간선 $v \downarrow p$ 에 대해 간선 pq (위아래 상관없음)를 모두 찾을 수 있습니다. 예를 들면 아래와 같은 경우가 있습니다.



그러한 (v, p, q) 쌍은 $O(\sum_{v \rightarrow p \in E} \deg(p)) = O(m\sqrt{m})$ 개 존재합니다. $\min(\deg(v), \deg(p)) = \deg(p)$ 이기 때문입니다.

따라서, 위에서 아래로 가는 $v \downarrow p \downarrow q$ 꼴의 경로도 당연히 모두 찾을 수 있습니다.

이제 각 $v \downarrow p \downarrow q$ 에 대해 q 와 v 가 인접한지 확인하면 됩니다. 간단하게는 해시셋으로 구현할 수 있지만 이는 너무 무겁고, 다음과 같은 방법으로 진행할 수 있습니다.

- 우선 크기 n 의 배열 A 를 초기화합니다.
- 각 v 에 대해...
 - 각 간선 $v \downarrow p$ 에 대해 $A[p]$ 를 마킹합니다. 즉 $A[p]$ 는 " p 가 v 의 아래에 있으면서 인접하다"라는 뜻입니다.
 - 다시 각 간선 $v \downarrow p$ 에 대해, 간선 $p \downarrow q$ 들을 순회합니다. $A[q]$ 가 마킹되어 있다면 삼각형 vpq 를 찾았습니다.
 - 다시 각 간선 $v \downarrow p$ 에 대해 $A[p]$ 의 마킹을 지웁니다.

각 삼각형은 $a \downarrow b \downarrow c$ 꼴의 경로를 정확히 하나씩 갖고 있으므로, 각 삼각형이 정확히 한 번씩 세어집니다. 총 시간 복잡도는 $O(m\sqrt{m})$ 입니다. 같은 방법으로 그래프에는 삼각형이 최대 $O(m\sqrt{m})$ 개 있음을 증명할 수 있습니다.

구현

연습문제

- [LC Enumerate Triangles](#)
- [BOJ 1762 평면그래프와 삼각형](#)을 평면그래프 조건 없이 풀 수 있습니다.

추가 연습문제

[BOJ 14571 모래시계](#) in $O(m\sqrt{m})$

모든 삼각형을 $O(m\sqrt{m})$ 에 찾습니다. 각 정점 v 에 대해, v 를 포함하는 삼각형 vpq 에 대해 간선 pq 의 목록을 저장해 둡니다.

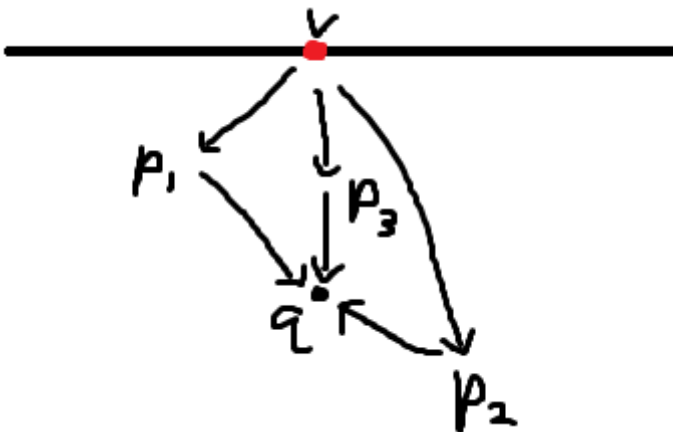
모래시계의 중심 v 를 고정하고, v 에 대한 간선 pq 로 이루어진 부분그래프를 생각해 봅시다. 이 부분그래프의 간선 e 개 중 두 개를 고르되 겹치는 정점이 없도록 하는 경우의 수를 구하면 됩니다. 첫 번째 간선 ab 를 고르고, 나머지 간선 중 a 또는 b 와 이어지는 것을 모두 제외하면, 남은 간선의 개수는 $e - \deg(a) - \deg(b) + 1$ 입니다. 이때 \deg 는 부분그래프 기준입니다.

부분그래프에서 차수를 관리하는 것은 위의 A 배열과 같은 방식으로 진행할 수 있습니다.

사각형의 개수

삼각형뿐만 아니라 사각형도 셀 수 있습니다! 사각형은 최대 $O(m^2)$ 개 있을 수 있지만, 개수는 $O(m\sqrt{m})$ 에 구할 수 있습니다.


메인 아이디어는 아래 그림과 같습니다. 사각형을 $v \downarrow p \rightarrow q$ 꼴의 경로 두 개로 분할할 수 있으니, 그런 형태의 경로를 세는 것입니다. 각 $v \downarrow p$ 에 대해, v 의 아래에 있으면서 v 와 p 에 인접한 정점 q 의 개수를 k_{vp} 라고 하면, 모든 $\frac{k_{vq}(k_{vq}-1)}{2}$ 의 합을 구하면 됩니다.







앞에서 보았듯이 $k_{vq} > 0$ 인 (v, q) 는 $O(m\sqrt{m})$ 개이고, 0보다 큰 모든 k_{vq} 를 $O(m\sqrt{m})$ 에 구할 수 있습니다.

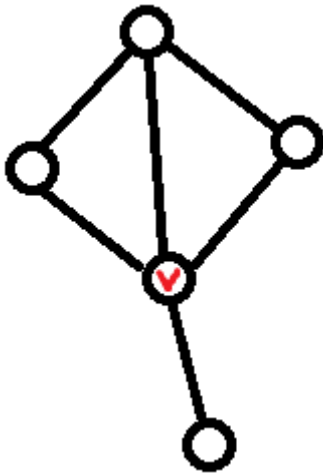
위 과정을 조금 변형하면 각 정점을 포함하는 사각형의 개수도 셀 수 있습니다.



[BOJ 2390](#)

제가 이 알고리즘을 배운 계기가 된 문제입니다. 검수하면서 풀이를 고민하다가 "사각형을 $O(M^2)$ 보다 빠르게 셀 수 없는데 어떻게 를 셀 수 있지?"라고 생각했는데, 사각형을 $O(M\sqrt{M})$ 에 셀 수 있더라고요...

바로 위에서 보았듯이, 각 정점 v 에 대해 v 를 포함하는 사각형의 개수를 셉니다. 이제 에서 차수가 4인 정점을 "의 중심"이라고 하면, 각 정점 v 에 대해 v 가 중심인 의 개수를 셉니다. 사각형의 개수에 $deg(v) - 2$ 를 곱하면 됩니다.

모든 v 에 대해 위 값을 구하고 합하면, 놀랍게도 크기 5의 완전 그래프에서 출력이 60이 나옵니다. 왜냐하면 다음  모양 케이스를 제외하지 않았기 때문입니다.



를 세기 위해, 각 간선 pq 에 대해 pq 를 포함하는 삼각형의 개수를 셉니다. 그 후 각 간선 pq 에 대해 pq 가 사각형의 대각선인 의 개수를 세줍니다. 삼각형의 개수를 k 라고 할 때 $\binom{k}{2}(deg(p) - 3)(deg(q) - 3)$ 이 답입니다.

참고로 이  모양의 정체는 [NPN open collector](#)로, 전기회로에서 사용하는 모양입니다.

[BOJ 28200](#) 4

모든 삼각형을 찾습니다. 각 정점 v 에 대해, v 를 포함하는 삼각형 vpq 에 대해 간선 pq 의 목록을 저장해 둡니다.

한 점 v 를 고정하고, v 에 대한 간선 pq 로 이루어진 부분그래프를 생각해 봅시다. 이 부분그래프에서 삼각형의 개수를 세면 되는데, 대부분의 정점에 대해서는 부분그래프가 작을 것이기 때문에 비트셋으로 풀 수 있습니다. 자세한 내용은 [에디토리얼](#)을 참조하세요.

참조

- [Paul Burkhardt, David G. Harris, Simple and efficient four-cycle counting on sparse graphs](#)